Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 14

Algebry Banacha i elementy odwracalne

math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

$$\text{algebra} \equiv \left(\begin{array}{l} \text{przestrzeń liniowa} + \\ \text{pierścień} + \text{łączność} \end{array} \right)$$

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c, \qquad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c,$$
$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c), \qquad (\lambda a)\cdot b = a\cdot(\lambda b) = \lambda(a\cdot b).$$

Motywacja. Niech X będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Przestrzeń liniowych operatorów ograniczonych $B(X)$ jest nie tylko przestrzenią Banacha, ale też algebrą z mnożeniem zdefiniowanym jako złożenie operatorów:

$$T, S \in B(X) \implies T \circ S \in B(X) \text{ oraz } \|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$$

bo $\|T \circ S\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(Sx)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T\| \|(Sx)\| = \|T\| \cdot \|S\|$. Co więcej operator identycznościowy $1 \in B(X)$ jest jedynką w tej algebrze: $1 \circ T = T \circ 1 = T$, oraz $\|1\| = 1$.

Def. Algebrą nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nazywamy przestrzeń liniową A nad $\mathbb{F}$ wraz z operają mnożenia $\cdot : A \times A \to A$, która jest dwulinowa i łączna. **Algebrą Banacha** nazywamy algebrę A, która jest przestrzenią Banacha oraz norma jest submultiplikatywna, tzn.

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|, \qquad a, b \in A.$$

Jeśli mnożenie w A posiada element neutralny, to nazywamy go **jedynką** algebry i oznaczamy 1. Zakładamy wtedy też, że $\|1\| = 1$. Algebra A jest **przemienna**, jeśli mnożenie w A jest przemienne.

Prz. Algebry operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha X

$B(X)$ jest algebrą Banacha z 1 (nieprzemienną jeśli $\dim(X) > 1$). Każda domknięta podalgebra $A \subseteq B(X)$ jest algebrą Banacha.

Prz. Algebry funkcji ciągłych na przestrzeni topologicznej M

Przestrzenie $C_0(M)$ i $C_b(M)$, normą $\|a\|_\infty = \sup_{t\in M} |x(t)|$, są algebrami Banacha z mnożeniem zdefiniowanym punktowo

$$(a \cdot b)(t) := a(t)b(t), \qquad a, b : M \to \mathbb{F}.$$

Są to algebry przemienne oraz funkcja tożsamościowo równa 1 jest jedynką w $C_b(M)$. Algebra $C_0(M)$ posiada jedynkę $\iff$ przestrzeń M jest zwarta i wtedy $C_0(M) = C_b(M) = C(M)$.

Prz. Algebra z mnożeniem zerowym

Na dowolnej przestrzeni Banacha X można zdefiniować mnożenie wzorem $x \cdot y := 0$ dla $x, y \in X$. Wtedy X jest algebrą Banacha. Jest to algebra przemienna bez jedynki (ekstremalny przykład).

Uw. Każda algebra Banacha A zanurza się w algebrę z jedynką $\widetilde{A}$:

Lem. (Ujedynkowienie algebry Banacha) Dla dowolnej algebry Banacha A suma prosta $\widetilde{A} := A \oplus \mathbb{F}$ wraz z mnożeniem i normą

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \qquad \|(a, \lambda)\| := \|a\| + |\lambda|,$$

$a, b \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, jest algebrą Banacha z jedynką $(0, 1)$ oraz $A \ni a \mapsto (a, 0) \in \widetilde{A}$ jest izometrycznym homomorfizmem algebr.

Dowód: 

Od tej pory zakładamy, że

rozważane przez nas algebry Banacha mają jedynkę!

Uw. Każda algebra Banacha A zanurza się w algebrę operatorów ograniczonych $B(X)$ na pewnej przestrzeni Banacha X:

Stw. Dla każdej algebry Banacha A istnieje przestrzeń Banacha X oraz izometryczny homomorfizm $\pi : A \to B(X)$.

Dowód: Rozważmy $X := A$ jako przestrzeń Banacha. Korzystając z mnożenia w A możemy zdefiniować π wzorem

$$\pi(a)x := a \cdot x, \qquad a \in A,\, x \in X = A.$$

Z rozdzielności mnożenia względem dodawania i łączności wynika, że $\pi(a)$ jest operatorem liniowym na X. Ponadto korzystając z submultiplikatywności normy w A mamy

$$\|\pi(a)\| = \sup_{\|x\|=1} \|\pi(a)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|a \cdot x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|a\|\|x\| = \|a\|.$$

Czyli $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$. Z drugiej strony skoro $\|1\| = 1$, to

$$\|\pi(a)\| \geq \|\pi(a)1\| = \|a \cdot 1\| = \|a\|.$$

Zatem $\|\pi(a)\| = \|a\|$. Stąd $\pi : A \to B(X)$ jest poprawnie zdefiniowaną izometrią. Z rozdzielności mnożenia względem dodawania i łączności wynika, że π jest homomorfizmem algebr. ∎

Def. Zbiór elementów odwracalnych w A oznaczamy przez

$$\mathrm{Inv}(A) := \{a \in A : \exists_{b\in A}\ ab = ba = 1\}.$$

Jeżeli $a \in \mathrm{Inv}(A)$ i $b \in A$ spełniają $ab = ba = 1$, to piszemy $b = a^{-1}$ i nazywamy **elementem odwrotnym** do a.

Uw. $\mathrm{Inv}(A)$ tworzy grupę, której elementem neutralnym jest $1 \in A$

$$a, b \in \mathrm{Inv}(A) \implies \begin{cases} ab \in \mathrm{Inv}(A) \text{ oraz } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \\ a^{-1} \in \mathrm{Inv}(A) \text{ oraz } (a^{-1})^{-1} = a. \end{cases}$$

Prz. Jeśli $A = B(X)$, gdzie X to przestrzeń Banacha, to

$$\mathrm{Inv}(B(X)) = \{T \in B(X) : T : X \to X \text{ bijekcja}\}.$$

Prz. Jeśli $A = C(M)$, gdzie M przestrzeń zwarta, to

$$\mathrm{Inv}(C(M)) = \{a \in C(M) : a(t) \neq 0 \text{ dla każdego } t \in M\}.$$

Lemat Neumanna

Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką $1 \in A$.

$$\forall_{a\in A} \ \|a\| < 1 \implies 1 - a \in \mathrm{Inv}(A) \text{ oraz } (1-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k.$$

Dowód: Niech $\|a\| < 1$ i połóżmy $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$. Dla $m > n$

$$\|S_m - S_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} a^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|a^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a\|^k = \frac{\|a\|^{n+1}}{1-\|a\|} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Czyli $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy w A. Zatem szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty} S_n$ jest zbieżny w A. Skoro $\|a^n\| \leq \|a\|^n \to 0$, to $a^n \to 0$ i stąd

$$(1-a)\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty} (1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - a^{n+1} = 1.$$

Analogicznie $\sum_{k=0}^{\infty} a^k(1-a) = 1$. Stąd $(1-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k$. ■

Wn. Elementy oddalone od $1 \in A$ o mniej niż jeden są odwracalne:

$$\{a \in A : \|1 - a\| < 1\} \subseteq \mathrm{Inv}(A).$$

Dowód: Jeśli $\|1 - a\| < 1$, to $a = 1 - (1 - a) \in \mathrm{Inv}(A)$. ■

Tw. Dla każdej algebry Banacha A zbiór $\mathrm{Inv}(A)$ jest otwarty w A i odwzorowanie $\mathrm{Inv}(A) \ni a \mapsto a^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$ jest różniczkowalne.

Dowód: Aby wykazać, że $\mathrm{Inv}(A)$ jest zbiorem otwartym trzeba pokazać, że dla każdego $a \in \mathrm{Inv}(A)$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że

$$K(a, \varepsilon) = \{b \in A : \|a - b\| < \varepsilon\} \subseteq \mathrm{Inv}(A).$$

Wykażemy, to dla $\varepsilon := \|a^{-1}\|^{-1}$. Niech $b \in K(a, \|a^{-1}\|^{-1})$. Wtedy

$$b = a - (a - b) = a(1 - a^{-1}(a - b))$$

gdzie

$$\|a^{-1}(a - b)\| \leq \|a^{-1}\| \cdot \|a - b\| < \|a^{-1}\| \cdot \|a^{-1}\|^{-1} = 1.$$

Czyli $(1 - a^{-1}(a - b)) \in \mathrm{Inv}(A)$ i skoro $a \in \mathrm{Inv}(A)$, to $b \in \mathrm{Inv}(A)$.

Dokładniej,

$$b^{-1} = [1 - a^{-1}(a-b)]^{-1}a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}[a^{-1}(a-b)]^k a^{-1}.$$

Zatem zbiór $\mathrm{Inv}(A)$ jest otwarty. Wykażemy teraz, że odwzorowanie $F : \mathrm{Inv}(A) \to \mathrm{Inv}(A)$, gdzie $F(a) := a^{-1}$, jest różniczkowalne. Aby wykazać, że F jest różniczkowalne w punkcie $a \in \mathrm{Inv}(A)$ trzeba znaleźć operator liniowy $F'(a) : A \to A$ taki, że

$$\lim_{b \to a} \frac{\|F(a) - F(b) - F'(a)(a-b)\|}{\|a-b\|} = 0.$$

Połóżmy, $F'(a)c := -a^{-1}ca^{-1}$, dla $c \in A$. Wtedy $F'(a) : A \to A$ liniowy i ograniczony, $\|F'(a)\| \leq \|a^{-1}\|^2$. Dla $b \in K(a, \|a^{-1}\|^{-1})$

$$\|F(a)-F(b)-F'(a)(a-b)\| = \|a^{-1} - \sum_{k=0}^{\infty}[a^{-1}(a-b)]^k a^{-1} + a^{-1}(a-b)a^{-1}\|$$

$$= \|\sum_{k=2}^{\infty}[a^{-1}(a-b)]^k a^{-1}\| \leq \sum_{k=2}^{\infty}\|[a^{-1}(a-b)]^k a^{-1}\|$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} \|a^{-1}\|^{k+1}\|a-b\|^k \overset{\frac{\|a-b\|}{\|a^{-1}\|^{-1}}<1}{=} \frac{\|a^{-1}\|^3\|a-b\|^2}{1-\|a^{-1}\|\|a-b\|}.$$

Stąd

$$\lim_{b\to a} \frac{\|F(a)-F(b)-F'(a)(a-b)\|}{\|a-b\|} \leq \lim_{b\to a} \frac{\|a^{-1}\|^3\|a-b\|}{1-\|a^{-1}\|\|a-b\|} = 0.$$

Co należał dowieść.